

和算文化中的數學問題特色

黃俊瑋*

本文考察江戶時期涉及數學知識分類的重要算書，整理並探討和算主流問題的發展、流變與相關脈絡，並探討江戶時期，和算家接收中算傳書後，如何在本土數學文化影響下，過渡並發展出具有在地化特色的數學問題。

和算主要依附在東亞漢字文化圈之下成長，雖然存在與中算、東算共通的特色，但吸納了中算知識後，在遺題繼承、算額奉納等特有的本土數學文化，以及數學家自主發展的問題意識等因素影響與促成下，發展出有別於中算與東算的在地數學文化與問題特色。

從他們設計的問題來看，除了將傳統中算問題與其它舊問題作各種推廣，同時，更多的創意體現在他們所設計，各類平面與立體圖形交織而成的幾何問題上。總之，和算家在輸入的中算基礎上，由數學學術社群與成員獨立自主且自發地從事數學知識活動，本土化、在地化且智性地發展出和算特有的問題特色與數學文化風貌。

關鍵字：和算、數學史、東亞文化、數學問題、知識分類

* 臺北市立和平高級中學數學教師

一、前言

從東亞歷史與東亞數學史的脈絡來看，傳統中國數學（中算）、韓國數學（東算）與日本數學（和算）的發展，¹具有緊密的關係。中算、東算與和算同屬漢字文化圈，其數學文本多是以漢字文言文的方式寫作，就東亞數學史的觀點來看，對中算、東算與和算有一定的認識與扎實的基礎，有助於提出宏觀而綜合性的論述。²誠然，近代東算與和算的發展皆受到傳統中算影響，然而，它們亦各自發展出特有的算學文化以及在地性的數學知識活動特色。本文將從江戶時期的日本數學發展談起，探討在和算文化下所發展出的數學問題特色，以及數學知識與問題之分類架構。

江戶初期和算的發展，一方面受到早期隋唐時期傳入日本的中算書影響，並與傳入的《算法統宗》、《算學啟蒙》與《楊輝算法》等中算書之間存在密切的關聯。探究江戶時期和算家的數學研究與數學著作的主要重心，並非數學命題、數學定理或性質，³而是和傳統中算一樣，以數學問題的設計與求解為主要核心。早期和算家感興趣與研究的問題，便包含了許多自中國傳入的問題。

經考證現存最早的本土和算書是 1600 年左右刊行的《算用記》，但該書作者刊年不詳。⁴就十七世紀初期的和算發展來看，受《算法統宗》影響最深，加以當時社會對檢地、測量、建築、工程、人夫、錢糧、交易等算用數學的需求，早期的和算著作內容，包含許多與實用數學相關的問題。1622 年，毛利重能《割算書》出版，⁵而百川治兵衛的《諸勘分物》亦以稿本的方式問世，這些書的主要內容皆是實用數學知識。又例如 1627 年，吉田光由（Yoshida Mitsuyoshi, 1598-1672）以《算法統宗》為藍本，出版的實用算書《塵劫記》，亦是一本以實用數學為主的算書，該書出版後廣為流傳，且刊刻版本眾多，一

¹ 一般而言，數學史以「和算」(*Wasan*) 代表江戶時期日本所發展出的本土數學研究、數學知識活動與數學文化，並以「和算家」指稱當時的日本數學家。

² 參考黃俊瑋，《關流算學研究及其歷史脈絡：1722-1852》(臺北：國立臺灣師範大學博士論文，2014)，頁 1-2。

³ 現代數學研究，主要關心的是數學命題以及數學定理的發明與證明。

⁴ 參考徐澤林，《和算選粹》(北京：科學出版社，2008)，頁 16。

⁵ 《割算書》刊刻約 1000 本，其內容包括珠算知識以及錢糧、粟布、借貸、買賣、檢地、工程、人夫、測量等實用問題。

方面成為當時最重要的數學教科書，同時也深受商人、職人與武士的喜愛並影響深遠。⁶而村松茂清（1608-1695）於1657年所著的數學教科書《算俎》，⁷無不展現出當時算家對實用數學的普遍重視。十七世紀初期誕生的日本本土數學書，主要內容多與實用數學有關，同時，受當時社會對「算用」之需求與驅使，加以私塾教學的普及，使得「算」得以深入庶民及武士階層。⁸

約莫到了十七世紀中後期，《算學啟蒙》與《楊輝算法》兩本中算書的影響力逐漸發酵。例如垛積、招差、諸約、圓周率、弧長、平面立體圖形的求積問題，以及各類幾何問題的設計與解方程相關研究，逐漸成為和算家所關心的重點所在。而《算俎》一書的成書年代，正處於算用與算學的過渡時期，書中除了換算、交易、實用幾何問題等許多實用數學問題外，也包含了帶縱開方、相應、積直、差分、盈朒、勾股弦、弧矢弦、開平方、開立方以及圓率等，與中算書《算學啟蒙》相關聯的數學主題。同時，作者進一步割圓至32768邊求得較準確的圓周率近似值，並且提出求球體積近似值的方法。顯示當時和算家感興趣的問題，正處於從實用數學至純數學問題的一種過渡。⁹

到了十七世紀末期，關孝和（Seki Takakazu, ?-1708）的重要著作中，實用數學問題已不復見，轉向純數學問題的研究。不過，無論關流免許狀目錄，¹⁰或者十八世紀初關孝和的《括要算法》、《三部抄》，或者關孝和與建部賢弘（Takebe Katahiro, 1664-1739）、建部賢明（Takebe Katakira, 1661-1716）集大成之作《大成算經》、建部賢弘的《綴術算經》、十八世紀中期有馬賴僮（Arima Yoriyuki, 1714 - 1783）的《拾璣算法》乃至十九世紀千葉胤秀（Chiba Tanehide, 1775-1849）的《算法新書》等重要和算書的內容，皆離不開源於中算的數學知識與數學問題。

⁶ 內容包含珠算、換算、代貸利息等商業計算，以及有關土木建築、面積、體積之計算等。一方面作為役人所需數學知識外，除了用語與度量衡有別於中國算書，主要內容受中國明代算書影響。

⁷ 有關《算俎》內容的詳細分析與研究，可參考廖傑成，《《算俎》之內容分析》（臺北：國立臺灣師範大學碩士論文未出版，2013）。

⁸ 參考黃俊瑋，〈江戶時期和算發展之分期〉，《中華科技史學會學刊》，18（臺北，2013.12），頁29。

⁹ 引自黃俊瑋，〈江戶時期和算發展之分期〉，頁29。該文中將此時期稱為前關流期之中的遺題過渡期（1641~1673）。

¹⁰ 和算的免許狀類似於修業等級證照，流派內依學算者所達到的不同標準發放免許狀。同時，免許狀上亦規範了算學學習的主要內容與問題。

如前述，自十七世紀中期開始，和算家對數學的興趣，逐漸從實用數學問題過渡到純數學問題的研究，而這樣的轉變與江戶時期所發展出的獨特數學知識活動－遺題繼承－有密切的關聯。接下來，我們從當時的遺題繼承風氣開始談起。

二、遺題承繼與問題的新趨勢

吉田光由所著的《塵劫記》問世後廣受歡迎，流傳版本眾多，其中，吉田光由在 1641 年出版的《新編塵劫記》的書末，留下了許多數學問題，向讀者與習算者們徵解。而當時和算家在解答了書末的問題之後，便著書出版問題的詳解，並繼續在書末留下自己設計的新數學問題，如此不斷承繼下去。於是，十七世紀中期，許多和算家紛紛投入解題與設計新問題的研究，並引發了往後 170 年之內包含吉田光由《新編塵劫記》（1641）、池田昌意《數學乘除往來》（1672）、村瀨義益《算法勿憚改》（1681）以及中村政策《算法天元樵談集》（1702）等四大體系的遺題繼承風潮，¹¹促進了此時期和算家之間的交流，以及為求解難題而發對算學的研究。

就如同前田憲舒（Kenjo Maeda）在他的《算法至源記》一書中所提到：「解前人之難法而致疑問於後人」，¹²而《新編塵劫記》一書下卷亦提到：

所謂勘之達者理應受到國家之器重，世間名為「算勘達者」之人雖多，然不入其道，常人所不知勘者之位也，世人多以為「勘者」，以計算速度和巧妙性而得名，今為區別「勘者」於普通人，舉題十二問，未有答術，以求「勘」者之答。¹³

由此可見，此時期和算家，早已不滿足於過去算學僅被視為「算用」工具，或追求計算速度的風氣，而是對於「算學」研究以及身為「算家」而言，具有高度使命感，追求更高層次的知識活動。¹⁴在此遺題繼承的文化下，和算家不

¹¹ 參考日本學士院編，《明治前日本數學史》，卷 1，（東京：岩波書店，1979 年），頁 131。

¹² 參考日本學士院編，《明治前日本數學史》，卷 1，頁 363。

¹³ 引自吉田光由，《新編塵劫記》，1641。

¹⁴ 參考烏雲其其格，《和算的發生：東方學術的藝道化發展模式》（上海：上海辭書，2009）。

斷推陳出新，設計出新的問題，因而迫使有志於數者，必需發展出新的工具與方法，用來解決各類難題。

就十七世紀中期的和算發展來看，遺題繼承實為最重要的和算文化與數學知識活動，此時期所發表的算學著述，多數是以解前人遺留問題，並提出自創新問題為目的。經筆者統計，在十七世紀中期與遺題相關的數學著作共計 17 本，可見此風氣的確推動了當時的數學問題研究與數學知識發展。再加上當時算學私塾林立，一方面吸引更多算學人才，同時也發展出各類新問題，在社會動因以及問題本身的內在困難度驅使之下，和算家開始學習、消納中算天元術以及《算學啟蒙》與《楊輝算法》等中算知識，並研究新的方法，包含設立方程、消元與解複雜方程，用以解決各類難題。

1674 年關孝和以《發微算法》一書，解決澤口一之（Sawaguchi Kazuyuki, 生卒年不詳）《古今算法記》所設立的十五道遺題，而這些問題不再與生活日用結合，且與實用數學無關，而是追求難題的設計以及解題挑戰為目的，反應出一種純為學問而學問，純為算學而研究的風氣。特別地，此書中的問題，多為代數式幾何問題，¹⁵關孝和在解這些問題的過程中，主要是利用天元術加上他自創的傍書法筆算符號系統，充分利用題目中的各個條件，以及他所熟知的幾何性質，羅列關係式，得到多元高次方程組，再利用他所發明的代數方法，解此方程組，將方程組化約成一元高次方程式，最後，透過開方翻法求這些未知量的數值解。¹⁶其中有一問題，關孝和竟歸結成一個高達 1458 次的方程式，可見解題與整個計算過程的複雜性非常人所能想像，而關孝和也被後人譽為「算聖」之美名。

在整個遺題繼承發展過程中，代數化幾何問題日趨複雜化，導致解題過程中需要引進更多輔助未知數，和算家也得利於各類方程式與新符號系統的研究與發展，得以創造並解決更複雜的問題，因此，豐富而創新的代數化幾何問題，成為往後和算家設計與研究的重要數學問題之一。

他認為此一時期遺題承繼活動的刺激下，基於戰國以來所形成，以明代珠算為背景、講究計算速度與計算技術的實用數學，才得以出現更強的智力追求，由計算速度轉向追求「算勘」（解難題）。

¹⁵ 所謂代數式幾何問題指的是，雖然該問題情境是幾何式的，但解題過程中，必需設立未知數，建立若干方程式，再利用代數方法與代數運算來求解方程式，方能解決該問題。

¹⁶ 開方翻法係源自於傳統中算的開方法，其數學原理即利用今日的綜合除法，將多項式作變換，搭配勘根定理來求多項方程式的近似解。

三、和算家對數學問題之分類

接下來，筆者考察江戶時期，涉及數學知識分類且具代表性的重要和算文本，並整理其知識與問題的分類架構，接著，對這些和算文本的分類方式作一簡單介紹。首先，在表 1 裡，筆者羅列這些文本中對於數學問題以及數學知識的分類方式，並作簡單介紹與分析：

表 1 關流和算文本問題分類方式

和算家	文本	分類方式	分類依據
關孝和	《三部抄》	解見題之法、解隱題之法、解伏題之法	設立未知數個數
建部賢弘	《發微算法 演段諺解》	見題：全題、折題。隱題。伏題：單伏、 眾伏	設立未知數個數
關孝和	《括要算法》	〈元卷〉：垛積 〈亨卷〉：諸約之法 〈利卷〉：角法 〈貞卷〉：圓周率、弧矢弦率、立玉積率	問題的類型
建部賢弘 建部賢明 關孝和	《大成算經》	見題、隱題、伏題、潛題	設立未知數個數
建部賢弘	《綴術算經》	探法則、究術理、計員數	數學知識類型
松永良弼	《方圓算經》	圓率與弧背率：周幕、周、背、矢、弦、 積 方率：角中徑、平中徑、距面斜弦 圓充方：角面、距面斜弦、距面矢、弧中截 斜、距面矢、距面弦	問題的類型 (依方圓分類)
有馬賴僮	《拾璣算法》	〈卷一〉：點竄、自約、增約、翦管 〈卷二〉：計子、交商、綴術、變數、 容術 〈卷三〉：分果、趕趁、球題、逐索、	問題的類型

		變式 〈卷四〉：作式、極數、整數 〈卷五〉：堆積、招差、求積	
千葉胤秀	《算法新書》	首卷：大、小數與度量衡介紹等 卷一：珠算相關知識 卷二：加、減、乘、除、開方、盈朒、求積、勾股等基礎知識 卷三：天元術、點竈術、諸約術、適盡方級法 卷四：招差、垛積、綴術、以及與方圓有關的玉率、弧矢弦、圓率、角術等 卷五：圓周率、弧、矢、弦、球體積、平中徑與角中徑、橢圓周長、穿去積等重要問題	囊括各類基礎算學知識，依問題的類型，由淺入深編排
小出兼政	《圓理算經》	圓理八問：直線、周、弧背、面積、體積、穿去積、極數	問題探求之對象（幾何量）
齋藤宜義	《算法圓理鑑》	圓理八題： 原、截、畫、穿、受、回、釣、轉	問題的類型

1680 年代，關孝和所著《三部抄》共包含了《解見題之法》、《解穩題之法》與《解伏題之法》三部分，¹⁷從這個架構來看，他主要是將問題分成見題、隱題與伏題三類型，而這種分類方式主要是依據未知數的數量。其中，見題類問題為不需設未知數且不用天元術的問題；隱題類問題則需設立一個未知數，一般透過術文中的算法，可程序性地導出一個多項方程式，進而透過開方翻法求其數值解；最後的伏題類問題，與多元高次代數方和組有關，問題中需設立多個未知數，再利用問題的條件與相關性質求得多元高次方程組，最後，透過「解伏題之法」所揭示的方法可對方程式進行消元、化簡進而求解之。

與此分類法類似的是建部賢弘在《發微算法演段諺解》一書裡的分類架

¹⁷ 有關《三部抄》內容的詳細分析與研究，參考林典蔚，《關孝和《三部抄》之內容分析》（臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2012）。

構。建部同樣將問題分成見題（含全題與折題）、隱題與伏題（含單伏與眾伏）三類，而上述分類法當中的這三類問題，恰可對應到關流免許狀之中的見題免許、隱題免許以及伏題免許等三段免許狀。例如，學士院收藏、由藤田貞資所抄寫的關流免許狀目錄即包含了「見題免許」、「隱題免許」、「伏題免許」三類，由此可知這三類問題，主要作為關流學派中的基礎知識，可謂關流數學知識體系中，最重要的內容。到了十八世紀初期關孝和、建部賢弘與建部賢明的集大成之作《大成算經》，則進一步提出第四類的潛題類問題，此類問題為無法列出代數方程的問題，主要為指數函數、三角函數非代數關係的數學問題。¹⁸換言之，關孝和的《三部抄》和建部賢弘的《發微算法演段諺解》，主要依問題設立未知數個數，將問題分成見題、隱題、伏題三類，並在《大成算經》一書中加入第四類潛題。這四類與問題所需未知數，以及所涉及方程式與解法有關。

關孝和死後，其門人於 1712 年編著了《括要算法》，該書以稿本的方式在流派內流傳，¹⁹並未刊刻，但書中有系統地整理了關孝和生前重要的數學研究成果，各卷卷名與主要內容如下：〈元卷〉利用累裁招差法處理了垛積問題，垛積總術與演段、垛積術以及衰垛；〈亨卷〉的內容主要是諸約之法，包含互約術、逐約術、齊約術、遍約術、增約術、損約術、零約術、遍通術、剩一術與翦管術；〈利卷〉為角法演段，此卷討論了三角、四角至二十角，求平中徑與角中徑問題；²⁰最後的〈貞卷〉，其內容包含了求圓周率與環矩術、求弧矢弦率術、求立圓積率術，主要與圓周長、弧長、球體積等圓理問題有關。從知識名稱來看，本書主要內容仍不脫中算影響，然也在處理許多問題的過程中發展出新方法。從這本書我們發現了另一種分類架構，前兩卷垛積與諸約與代數、數論領域相關，而後兩卷則與方理、圓理等幾何問題有關。

前述的《三部抄》包含了關流之方程理論，以及各類圖形求面積與體積問題。其中，《解見題之法》討論了各類面積與體積公式，而《解隱題之法》與《解伏題之法》則討論了一元高次方程式之求解，以及多元方程式消去求解，主要皆與解方程有關。然而，《括要算法》一書的內容與涉及主題較廣，包含招差、垛積、諸約、角術、圓周率、弧矢弦、立圓積等主題，都是當時關流門

¹⁸ 參考徐澤林，《和算中源》（上海：交通大學出版社，2013），頁 25-30。

¹⁹ 有關《括要算法》內容的詳細分析與研究，參考劉雅茵，《關孝和《括要算法》之內容分析》（臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2011）。

²⁰ 即求正三角形至正二十邊形之內接圓與外切圓半徑。

派內基礎而重要的問題。《三部抄》加上《括要算法》這兩部著作，可說規範了當時關流算學的基礎知識範疇。與《括要算法》分類架構類似的是，有馬賴僮於 1767 年刊刻出版的《拾璣算法》，²¹該書作者有馬賴僮是久留米藩的藩主，他編著此書，公開了許多關流密傳的數學知識，在和算發展的歷史上，具有重要的意義。同時，該書收錄 150 個當時關流重要數學問題，且書中所含蓋的問題類型更多樣，他依問題類型分成卷一的點竄、自約、增約、翦管；卷二的計子、交商、綴術、變數、容術；卷三的分果、趕趁、球題、逐索、變式；卷四的作式、極數、整數以及卷五的堆積、招差、求積等二十類問題。可見，比起關孝和的時代，十八世紀中期和算家所發展與處理的問題類型已更加豐富而多元。

到了十九世紀，千葉胤秀所編和算教科書《算法新書》共包含六卷，²²並以循序漸進的方式編排。前三卷為一般基礎數學知識，當中的首卷包含大、小數與度量衡介紹等；卷一為珠算相關知識；卷二包含加、減、乘、除、開方、盈朒、求積、勾股等基礎知識。第三卷之後的內容，開始加入了關流內較專業的和算知識，其中第三卷為天元術與點竄術，並包含諸約之術與適盡方級法，第四卷則招差、垛積、綴術，以及與方圓有關的玉率、弧矢弦、圓率、角術等問題。至於第五卷則為更進階的幾何問題，包含了綴術求圓周率、弧、矢、弦、球體積與角術有關的平中徑與角中徑表，也包含了求橢圓周長與穿去題等流行於當時的問題類型。比對前述算書與《算法新書》的內容可以發現，早期的天元術、解方程、招差、垛積、諸約、角術、圓率、球積與弧長等與《三部抄》與《括要算法》相關的主題與內容，皆包含於《算法新書》中。同時，《算法新書》主要作為當時重要的算學基礎教科書，並非創造與研究性質的著作，因此，其內容囊括的是十九世紀入門習算者，所需學習的各類基礎算學知識。該書依問題的類型，由淺入深編排，除了一般實用數學與珠算知識外，也涵蓋了較為專門的數學知識與重要的數學問題。

此外，建部賢弘的《綴術算經》一書，則是依據數學知識活動，將問題分

²¹ 有關《拾璣算法》內容的詳細分析與研究，參考張功翰，《《拾璣算法》初探》（臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2014）。

²² 有關《算法新書》內容的詳細分析與研究，參考陳政宏，《《算法新書》初探》（臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2014）。

成「探法則、究術理、計員數」三類，而非依據問題的類型來分類。²³另外尚有許多和算書籍，通篇內容皆聚焦在幾何問題。例如松永良弼（Matsunaga Yoshisuke, ?-1744）的《方圓算經》，整本書的內容皆與幾何問題有關，²⁴書中他主要區分成「圓理—圓率」、「方理—方率」以及「圓充方」三類。和算家小出兼政（Koide Kanemasa, 1797-1865），接受其師和田寧（Wata Yasushi, 1787-1840）的傳書，編成《圓理算經》一書，此書中他依據圓理問題探求的對象，將圓理問題分成直線、周、弧背、面積、體積、穿去積與極術等「圓理八問」。除了小出兼政對圓理問題進行分類外，十九世紀關流齋藤宜義（Sato Nobuyoshi, 1816-1889）的《算法圓理鑑》，則是依據當時和算家們設計問題所涉及的相關概念，將圓理分成「原、截、畫、穿、受、回、釣、轉」等八類問題。²⁵

綜合來看，江戶時期關流和算家的數學研究，主要可分成幾何類與非幾何類。其中，非幾何類問題主要與代數和數論有關，包含了天元術與點竄術等涉及代數符號與符號運算的基礎知識，也包含了解隱題與解伏題之法當中涉及的籌式運算、演段、消元、開方等有關方程理論的知識。其它還有招差、垛積、衰垛以及與數論有關的互約、齊約、遍約、增約、損約、零約、剩一、翦管術等諸約之術，此外還有若干組合問題、幻方問題或數論雜題等，而上述各類問題多具有中算相關淵源。除此之外，絕大部分的數學問題，皆與幾何圖形有關。接下來，我們從十八世紀之後的和算問題發展與特色開始談起。

²³ 有關《綴術算經》內容的詳細分析與研究，參考林美杏，《建部賢弘之研究——以《綴術算經》為例》（臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2013）。

²⁴ 有關《方圓算經》內容的詳細分析與研究，參考王燕華，《松永良弼《方圓算經》之內容分析》（臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2012）。

²⁵ 關於這八類問題，筆者將在本文第六章中，作較詳細的介紹。

四、十八世紀和算問題發展與特色

(一) 非幾何類問題

筆者從文本的考察中發現，雖然早期《三部抄》、《七部書》及《括要算法》等重要關流和算著作中，包含了許多與數論、代數相關的研究，如解方程、招差、垛積、增約以及零約術等基本問題，這些問題主要源自於傳入的中算書。

又如徐澤林所著的《和算中源-和算算法及其中算源流》一書，除了比較相關主題在中算與和算的發展外，也系統性地整理了過去的研究成果。此書共分成十個章節，探討和算在下列十個主題的知識內容與發展：演段、開方術、解伏題、招差術、垛積術、翦管術與剩一術、零約術、極數術、累遍增約術、圓理綴術等。²⁶從這裡不難發現，和算非幾何類問題的研究與發展，多有其中算淵源。

另外，關流所獨創的傍書法、點竄相關符號系統，或者解隱題、解伏題等方程理論，以及各類開方法等有關代數學的數學知識，在十八世紀後，則慢慢地成為和算家解決問題過程中必備的基礎工具，而非新問題的來源，亦非解題的目標。而十八世紀和算家在代數方面的興趣與獨創性成果，也特別展現在開方與垛積問題的研究上。

在和算知識發展的脈絡下，求解一元高次方程式的方法，稱為開方翻法。除了解方程式脈絡底下的開方外，開方的意義更與開平方、開立方（即求 \sqrt{A} 、 $\sqrt[3]{A}$ 之值）密切相連。²⁷早期和算家以及和算書中所用開方法，主要延襲了中算傳入的開方法特色，到了十八世紀，和算家進一步創造出「開方綴術」，相當於求得 \sqrt{A} 的二項展開式。例如，松永良弼在其著作《算法綴術草》處理除法以及開方的脈絡中，發展出與 $1/1-x$ 、 $\sqrt{a^2+b}$ 以及 $\sqrt{1+x}$ 有關的冪級數展開式，可看成二項式定理，指數為負數以及有理數的情況。而後，安島直圓（Ajima Naonobum, 1732-1789）在《綴術括法》一書中提出了「綴術括法」，相當於求得了 $(1+x)^{1/n}$ 的展開式。到了十九世紀，和算家亦進一步發展出指數

²⁶ 參考徐澤林，《和算中源—和算算法及其中算源流》。

²⁷ 和算家在方程式求根脈絡下的開方法，主要與宋元時期的中算有關，而開平方與開立方的方法，則早在漢朝的《九章算術》書中便已存在。

為有理數的相關係數表，這些表的內容皆可視為二項展開式，指數為有理數時的推廣。除此之外，安島直圓的《不朽算法》中，更進一步造出指數表，並造出新方法，利用此表與類似現今對數的概念，加速開高次方求數值解的過程。

另外，傳自中算的垛積術，亦是十八世紀和算家感興趣的重要問題。關孝和《括要算法》〈元卷〉裡，對垛積術進行了系統性的研究與整理。十八世紀中期，包含久留島義太 (Kurushima Yoshihiro, ?-1757)《開方和術》、松永良弼，《算法全經·垛積》與《太陰率》等書，皆作了更進一步研究與推廣，松永也利用「太陰率」，分成奇偶次方兩種情況，分別求得了處理方垛問題的一般性方法，進而解決了 $\sum_{k=1}^n k^i$ ，當 $i=1, 2, \dots, 21$ 的情況。他利用表與式圖等方式，處理了各類與垛積相關的有限級數求和問題。

除了上述提到，這些與代數與數論相關的問題外。整體而言，和算家研究與創造的新問題，多以幾何類為主，也因此，「圓理」便成為江戶時期和算最豐富且具特色的研究成果。接著，我們簡單介紹十八世紀和算家所關心的圓理問題類型，以及相關發展過程。

(二) 幾何問題

就一般和算著作上的問題來看，十八世紀和算家所發展與創造的問題，大多數仍屬幾何類範疇。在問題情境與題設條件下，和算家以求得某些幾何量的數值或求得該問題的術文——演算法——作為問題的主要目標。針對這些和算家所提出的幾何問題，筆者將其分成二大類型。

第一類型為典型的幾何問題，主要與各類幾何圖形求長度、求面積、體積有關。例如求圓周率、圓周長或橢圓周長、求弧背、求矢、求弦、求正多邊形角中徑與平中徑，或者求典型平面與立體圖形的面積、體積以及穿去積等問題皆屬此類。這些問題除了出現在關孝和的《解見題之法》與《括要算法》的〈利卷〉和〈貞卷〉之外，十八世紀重要和算家，包含建部賢弘所著的《圓理弧背術》(1722)、蜂屋定章的《圓理發起》(1728)，久留島義太的《久氏弧背草》，松永良弼著作的《方圓算經》(1739)、《立圓率》、《圓周率》、《方圓雜算》，山路主住的《算法弧背詳解》，以及安島直圓的《弧背術解》等著作，主要內容都是與求圓周率、弧、矢、弦以及圓內接、外切正多邊等問題有關。特別是自

建部賢弘於 1722 年著《綴術算經》之後，和算家開始利用幕級展開式，試圖解決這些問題。從投入研究的和算家與相關著作的數量來看，這類問題為十八世紀的主流數學問題，是此時期和算家所關心的重點，其重要性可見一斑。

此外，自建部賢弘《綴術算經》第六問提到極值問題與相關解題方法後，和算家們亦開始對極值類問題感興趣，以極值問題為主題的著作包含下面幾本書：久留島義太的《久留島極數》（未刊刻）與《久氏遺稿・地之卷》（未刊刻）、藤田貞資（Fujita Sadasuke, 1734-1807）的《極數》以及會田安明（Aida Yasuaki, 1747-1817）的《算法極數術》等，這些都是與極值問題有關的專書。到了十九世紀後，小出兼政的《圓理算經》（1843）的〈統元之卷〉，將「極術」列為圓理八大問題之一。而齋藤宜義（Sato Nobuyoshi, 生卒年不詳）的《算法圓理鑑》（1834），亦將圓理分為八類問題，其中的「原題」類包含了極數類問題。由此可見，在《綴術算經》後，與極值相關的問題蓬勃發展。最後，到了十八世紀後期，和算家開始大量研究、發展出各類穿去題，這些穿去題相當於求兩立體圖形相交區域之體積與表面積問題。²⁸

至於第二類型的問題，通常為孤立的數學問題，問題的內容，主要是給定相關圖形，並在設定的若干已知條件與幾何關係之下，求某些未知的「幾何量」或「數值」。其中，這類問題包含許多屬於「代數式幾何」類的問題，需設立一個或多個未知數，利用解隱題與伏題之法，求得開方式進而求其數值解。例如：關孝和《發微算法》所解的問題皆為此類。另有些問題，和算家並非透過假設未知數再求得代數方程式的方法來求其數值解，而是藉由圖形相關幾何性質列式，最終求得連結已知量與所求量的公式或演算法。諸如安島直圓的《不朽算法》、藤田貞資的《精要算法》〈下卷〉收錄的問題集、藤田貞資父子所收錄的算額集《神壁算法》、《續神壁算法》及《增刻神壁算法》等書中的問題，多數屬於此類。這些問題在圓、方等各類平面圖形與立體圖形交織之下，呈現出相當豐富而多樣化的幾何圖形，包含了勾股形、任意三角形、正方形、長方形、菱形等各類多邊形；圓形、橢圓、弧形、扇形、角柱與圓柱體、角錐與圓錐體、球等平面與立體圖形以及這些圖形的組合，交織成一幅幅美麗的幾何圖

²⁸ 相關問題可參考小林龍彦、田中薰，〈算額にあらわれた穿去問題について〉，《數學史研究》，90（日本，1981），頁 1-39。與小林龍彦、田中薰，〈和算における穿去題について--關孝和の穿去題の研究とその継承〉，《科學史研究》，2（日本，1983），頁 154-159。

案。

值得一提的是，十七與十八世紀和算家所設計與求解的幾何問題，大部分與求幾何圖形中的某些「線段長」有關，亦即在已知某些幾何圖形之關係與若干條件下，求圖形中的某線段之長。例如，求正多邊形內切圓與外接圓半徑長有關的平中徑與角中徑問題，或者求弧形之矢長、弦長或各距面弦長等皆屬此類。此外，和算著作中，大多數的圓理問題，亦多是以求幾何圖形中的某線段長為主，一般常見的代數式幾何問題或者常見的容圓問題等皆屬此類。

這裡，我們先以關孝和《發微算法》一書為例，該書所解的 15 個問題，便包含了 14 個幾何問題，而這十四個問題的所求，不外乎為圓之直徑、多邊形邊長、勾長、股長、弦長等幾何線段長。如表 2 所示，²⁹筆者整理該書 14 個問題中所求的幾何線段，不難看出，這些所求幾何量都是與邊長、勾、股、弦、圓徑有關的線段長。

表 2 《發微算法》各問題所求幾何線段

問題	所求之幾何線段
第一問	大、中、小圓直徑
第二問	平方面、立方面（即正方形與正立方體之邊長）
第三問	甲、乙、丙、丁方面（即正方形之邊長）
第四問	甲、乙、丙方面（即正立方體之邊長）
第五問	甲、乙、丙、丁、戊方面（即正立方體之邊長）
第六問	勾、股、弦
第七問	勾、股、弦
第八問	勾、股、弦
第九問	圓徑、勾、股、弦
第十問	勾、股、弦、中勾、方面
第十一問	勾、股、弦、方面、圓徑
第十二問	大、中、小斜

²⁹ 參考整理自關孝和，《發微算法》，（《和算選粹》；北京：科學出版社，2008）。

第十三問	大、中、小斜
第十四問	甲、乙、丙、丁、戊（即四邊形邊長與對角線長）

《發微算法》書中的這些問題，基本上都是「代數式幾何」問題，在給定若干限制條件下，求某幾何線段長。這些問題皆與前述隱題類或伏題類問題有關，亦即關孝和在處理這些問題時，皆需設立一個或多個未知數，再依題意或已知條件佈列方程式，再經由演段、消元等過程，最終得所求幾何量的一元高次方程式，再以開方翻法求解所求線段長的數值解。

接著，再以安島直圓的《不朽算法》為例，³⁰該書上卷共收集了 33 個問題，除了第一問與第二問之外，其它 33 個問題皆為幾何問題。表 3 裡，筆者整理了《不朽算法》第 3 問至第 35 問所求幾何量。³¹

表 3 《不朽算法》各問題對所求幾何線段

問題	所求幾何線段	問題	所求幾何線段
第 3 問	中圓徑	第 4 問	勾、股
第 5 問	勾、股	第 6 問	長徑
第 7 問	平	第 8 問	大圓徑
第 9 問	甲圓徑	第 10 問	方面
第 11 問	小圓徑	第 12 問	等圓徑通術
第 13 問	大、中、小矢	第 14 問	各圓徑
第 15 問	甲圓徑	第 16 問	各斜
第 17 問	六斜及積 ³²	第 18 問	六斜
第 19 問	上下截積	第 20 問	上下截積
第 21 問	長徑	第 22 問	交斜
第 23 問	短徑	第 24 問	各球徑
第 25 問	各球徑	第 26 問	逐球徑
第 27 問	逐球徑	第 28 問	無奇零術 ³³

³⁰ 有關《不朽算法》內容的詳細分析與研究，可參考王裕仁，《安島直圓《不朽算法》之內容分析》（臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2013）。

³¹ 參考整理自安島直圓，《不朽算法》，（《和算選粹補編》；北京：科學出版社，2009）。

³² 即四面體六段邊長與體積。

³³ 即求使所求三角形之三邊長皆為整數或有限小數的術文。

第 29 問	無奇零術	第 30 問	各圓徑
第 31 問	下圓徑	第 32 問	各圓徑通術
第 33 問	各圓徑通術	第 34 問	各圓徑通術
第 35 問	穿去積		

除了第 18 問求體積、第 19 問與第 20 問求上下截積、第 28 問與第 29 問求邊長的無奇零術、第 35 問求穿去積這 6 個問題之外，其它 27 個問題都是求圓徑或邊長等線段長。又其它諸如有馬賴僮的《拾璣算法》、藤田貞資的《精要算法》〈下卷〉等關流數學問題集，以及藤田貞資父子所收集編錄的《神壁算法》、《續神壁算法》、《增刻神壁算法》等書的幾何問題，也多具有此特色，在此不贅述。

總結來說，求「直線」（線段長）問題為十九世紀之前，和算圓理問題中最豐富多元的類型。除了求平中徑、角中徑、矢、弦、距面弦等典型問題之外，傳統代數式幾何問題，以及當時流行的容圓與容球問題等，皆屬此類。³⁴

五、算額奉納文化與問題設計³⁵

江戶時期，影響和算發展與傳播的另一重要數學文化活動為「算額奉納」。當時，對數學感興趣進行學習研究的，主要是低等武士和一些較富裕的農民、町人，習算可謂江戶的世俗文化之一。當時代這些社會階層把數學當成一種藝能，加以研習與承傳，而奉揭算額正是這一藝能活動的表現。³⁶當時的和算家常把算題放在寺廟裡，供有心人士演練，這就是所謂的算額奉納。³⁷學習、研究和算的人，為了能夠順利地進行數學研究、希望數學能力不斷提高而向神佛祈願，於是和算家將自己設計的算題與圖形畫在匾額上，向神社佛閣奉納算

³⁴ 當時的和算問題裡，各類容圓與容球問題所占比例相當多，這類問題皆是以求問題圖形中的內切圓直徑或內切球直徑長為主。

³⁵ 本節內容，主要節錄整理自拙文：〈江戶時期寺廟中的數學交流〉，《中華科技史學會學刊》，19（臺北，2014.12），頁 52-56。

³⁶ 參考徐澤林，《江戶時代的算額與日本中學數學教育》，《數學傳播》，31(3)，（臺北，2007），頁 70-78。

³⁷ 參考蘇意燮，〈天元術 vs. 點竄術〉，《HPM 通訊》，3，（臺北，2000.2），頁 2-6。

額，一方面因解出數學問題因而感謝神佛恩賜，同時也展現自己的研究成果，特別是自己設計創造的算題、術文與圖形。

在算額上所呈現的數學問題是幾何多於代數，這是因為，幾何問題含有諸多圓形或多邊形，因此顯得更有吸引力。典型的算額問題是求邊長或者圓的直徑，當然也包含了直線、三角形、內切圓與圓周長等問題。漸漸地題目難度越來越深，甚至牽涉到球、橢圓等更複雜的問題。整塊算額的配置上，通常其上方是安排彩色的幾何圖形，下半部放置題目、答案及解法，最左側則為流派、教師、展示者的名稱及奉獻的日期。³⁸參考圖 1 與圖 2 當中的算額，其中，圖 1 是長野縣天然寺裡的算額，而圖 2 裡的算額，則為最上流的門人所奉納。³⁹



圖 1 算額剪影



圖 2 最上流門人奉納之算額

和算家們透過算額，提出自己設計的算學問題，並徵求其他和算家的解答。換言之，算額奉納除了成為和算的重要宣傳媒介，亦帶動了不同流派或和算家之間進行算額競技的風氣，促進和算流派之間的交流，形成一種獨特的知

³⁸ 參考蘇意燮，〈日本寺廟的算額介紹〉，《HPM 通訊》，6，（臺北，2003.5）。該文所述內容主要參考、引自 Itō, E., & Kobayashi, H., & Nakamura, N., & Nomura, E., & Kitahara, I., & Yanagisawa, R., & Tanaka, H., & Ōtani, K., & Sekiguchi, T.: *Japanese temple mathematical problems* (Japan: Kyōikushokan, 2003).

³⁹ 圖一與圖二引自和算の館：<http://www.wasan.jp/>。

識傳播與交流方式。至於奉獻算額的年代及其數量，可參考表 4。⁴⁰

表 4 日本各時期現存算額數量

年代	算額數量
十七世紀晚期	8
十八世紀早期	33
十八世紀晚期	284
十九世紀早期	1184
十九世紀晚期	795
二十世紀	133
不明年代	188

江戶時代中後期，隨著奉納算額風習的流行，也出現了透過解答算額上的問題來進行數學學習與交流的現象，所以到十八世紀後期，「算額問題集」之類的數學書問世。當時關流頗具名望的藤田貞資，偕其子藤田嘉信編著了算額問題集《神壁算法》(1789)，書名中的「神」指的當然是算額奉納之所與神社寺廟有關，而「壁」則意味著這些算額是懸於神社寺廟「牆壁」上。源誠美為《神壁算法》作序時提到：

藤田貞資者受關孝和之道，於山路氏潛心於數學三十年，自言如有得焉……其門人若有告事求福者，畫算術於板泰，懸於廟堂之壁上，其子嘉言輯錄之，名曰：神壁算法。⁴¹

此段序文說明藤田貞資父子輯錄門人奉納算額成《神壁算法》的來由，另外，藤田貞資也在《神壁算法》自序中也同樣談到編著此書的動機：

凡人有願，欲獻畫馬於廟堂，而以禱上下神祇謂之繪馬，……。發我算徒有所獻者俱皆算苑之英華也，好事者不遠千里而至爭采朵之然亦得無誤訛乎，……。命兒嘉言編選之於是乎修飾討論遂成一書，名曰神壁算法，若有所續懸者，則隨而載於後欲使勿遺漏，所勤省羈旅之

⁴⁰ 此表引自蘇意雯，〈探索日本寺廟的繪馬數學〉，《當數學遇見文化》，臺北：三民出版社，2009，頁 187。此外，除北海道地區沒有發現算額外，日本全國幾乎所有地區都出現過算額。根據 Eiichi Itō 等人的統計，總計這段時期於日本總共呈獻了 2625 塊算額，但由於火災、氣候和損毀或遺失等因素，時至今日僅存八百餘片。

⁴¹ 引自源誠美，《神壁算法》，序文。

勞而已。⁴²

另一方面，藤田嘉言為《續神壁算法》作序亦提到：

向所著神壁算法，廣集海內之術，多載衆人之題於是乎，有志於我算數之道者，脫行々之疲免望々之勞，不度風水波濤之險，瘴癘崔嵬之難，而邦國之算題，靈鎮之數術皆可包而觀也。……，今與同志之輩又集錄之，詳加校正以繼前志，名曰續神壁算法。⁴³

由此可見，藤田父子所輯錄的《神壁算法》與《續神壁算法》，促進了和算家之間的交流，書中主要收錄關流弟子們奉納於各地寺廟的算額問題與答案，使得有興趣的習算者可省去舟車之勞，一覽關流眾算家的研究成果。這些原是供奉在各地的算額，也因為藤田貞資父子的整理，得以集結成冊出版刊行。此後，仿此形式的算額集陸續出版。藤田貞資之子藤田嘉信於 1796 年再增編《增刻神壁算法》以及 1806 年續編《續神壁算法》，持續收錄當時奉納於神社寺廟裡的重要數學問題。⁴⁴除了藤田氏父子外，十九世紀初關流和算家千葉胤秀，於 1820 年編著《邦內神壁算法》一書，收錄了 29 個算額問題。接著於 1830 年出版了《算法新書》，書末的〈雜題解義〉裡收錄他的弟子所奉納之算額五十條。⁴⁵

綜觀江戶時期的學習與研究數學的和算家們，除了透過著書的方式，留下研究成果之外，他們也會將自己的算學研究成果，包含問題、答術以及相關圖形，透過算額的方式「發表」在神社佛閣或寺廟之中。就現存的算額來看，絕大多數的問題，都是附有幾何圖形的幾何類問題，算額奉納除了是和算特有的數學文化活動，從中也看出他們偏好的問題類型與問題特色。接下來，我們進入到十九世紀和算問題發展與特色。

⁴² 引自藤田貞資，《神壁算法》，自序。

⁴³ 引自藤田嘉言，《續神壁算法》，自序。

⁴⁴ 此書成於文化三年，刊刻於文化四年。

⁴⁵ 筆者統計，奉納於仙臺地區有 27 題，奉納於一關地區有 17 題，可見他的弟子主要活躍於仙臺與一關一帶。其它比較著名的算額集尚有以下諸書：(1) 安島直圓所輯錄的《京都祇園額解術》，此書為抄本。(2) 佐佐木其爭於安政 4 年所輯錄的《改補算額備要大成》，(3) 藤田吉勝的《算額級聚拔》，另有(4)《算額三除開立方》抄本，(5)《算額用字和解》抄本等書。參考徐澤林，《江戶時代的算額與日本中學數學教育》，《數學傳播》，31(3)，(臺北，2007)，頁 70-78。

六、十九世紀和算問題發展與特色

起源於中算的垛積術，引發和算社群的研究興趣；十八世紀與垛積有關的各類問題，皆與求有限項級數和有關。歷經關孝和以及十八世紀和算家松永良弼、久留島義太等人的研究與發展，到了十九世紀關流和算家和田寧則進一步將有限項級數公式推廣，發展出各類無窮級數求和之數值表（亦可視為積分數值表），並用諸解圓理問題的過程中。例如，小出兼政《圓理算經》收錄和田寧所發明的「疊率四成表」與「疊率見飛表」，皆相當於無窮級數之數值表，這些表將傳統涉及有限和之垛積術，推廣至與無窮級數和有關的數值表。

十九世紀，各類「表」的發明與應用是和算發展的重點之一，和算家們創製大量的數學表，除了用於解題之外，也具有認知概念上的意義，而這樣的特色是當時東亞數學文化中僅見。例如和田寧將諸多可與定積分連結的無窮級數和，以表的方式呈現，並廣泛地用於求解各類求長、求面積與體積問題的過程裡。他所發展出的各類數值表非常多樣，除了各類無窮級數表，還包含《圓理算經》書中所收錄，與方理和圓理相關的截徑順法、截弦順法、截矢順法、截徑貫法、截矢順貫法，創製矩線表、究疊表等各類表，這些表皆被用於幕末圓理問題的求解過程中。此外，和田寧的圓理研究是十九世紀和算發展的焦點，透過圓理豁術輔以創製的諸表，⁴⁶使得許多幾何難題至此得以順利解決，並不斷推陳出新，發展出更加複雜且多元的新問題。前述《圓理算經》一書，便是利用和田寧所創方法，求解羅列的各類幾何難題。

除此之外，若從前述算額奉納的數量，以及算額與和算書中益加困難的問題來看，十九世紀和算家對於「解題」的興趣並未減弱。「設題施術」仍是一般和算家最主要的數學活動，各種名為《算法》的書，主要內容便是各類問題與答案公式。而這時候的和算家，也依據問題的本質，將問題進行分類，這裡我們以齋藤宜義（Sato Nobuyoshi, 1816-1889）於1834年刊刻出版的《算法圓理鑑》為例，⁴⁷說明十九世紀和算問題的發展與特色。而這本書針對圓理問題

⁴⁶ 所謂的圓理豁術，主要是將所求的幾何圖形，作分割再求和，類似於今日的積分概念。

⁴⁷ 此書為齋藤宜義著，其父親齋藤宜長閱、市川行英(Ichikawa Koei)訂，其中齋藤宜長父子是群馬縣的和算家，市川行英為齋藤宜長之門人。此書刊刻年，齋藤宜義方十八歲，此書可能是其父指導與幫助下完成。

提出了新的分類方式，因此透過本書，一方面有助於瞭解當時和算家如何對圓理問題進行分類，同時，亦可看出當時算學問題的特色與多樣性，了解他們如何透過新概念的引入，來創造出各類新問題。

齋藤宜義在《算法圓理鑑》的自序中提到了他對圓理問題的分類：「夫原理有八題：原、截、畫、穿、受、回、釣、轉是也。」⁴⁸同時，他也進一步說明這八類問題各自的意義：

原質象形，而圓象玉類之諸形，謂之原題；如原題截分之，謂之截題；原形畫異形，謂之畫題；原題穿異形，謂之穿題；照形以其光受別形，謂之受題；周絲內容形及挾筆文回之，謂之回題；以絲釣垂形，謂之釣題；列形其周附形，又其周附形轉距之，謂之轉題。⁴⁹

他除了將圓理問題分成八類外，並各舉若干問題與答術為例。此書共收錄了 36 個問題，包含原題 7 題並附圓理極數問題 5 題、截題 3 題、畫題 2 題、穿題 8 題、受題 1 題、回題 1 題、釣題 1 題、轉題 3 題。最後附錄中有 5 個問題，包含原題 1 題、穿題 1 題、級數問題 2 題以及組合問題 1 題。以下筆者進一步說明八類問題的意義，並舉書中的例子供讀者參考。

原題

所謂的原題即為：「**原質象形，而圓象玉類之諸形**」，亦即各類常見曲面形體的求長與求積等基本問題。例如，求各類平面、立體圖形的面積、體積乃至線段長、弧長、圓周長等問題皆屬此類。而《算法圓理鑑》一書也以原題類問題所占比重最高。此外，書中的原題尚包含了「圓理極數」類問題，此類問題與極值相關。

截題

除了原題類問題，和算家主要以原題為基礎，引入各類新概念來設計出新問題。例如，截題類問題的來源為「**原題截分之**」，即將原題當中的各類曲面形體作分割，求截割後形體之體積、截面積或截口曲線長度等問題，如圖 3 所示，⁵⁰便是將圓錐臺斜截而設計出的問題。

⁴⁸ 引自齋藤宜義，〈自序〉，《算法圓理鑑》，收入徐澤林，《和算選粹補編》（北京：科學出版社，2009）。

⁴⁹ 引自齋藤宜義，〈自序〉。

⁵⁰ 本圖片引自齋藤宜義，《算法圓理鑑》，收入《和算選粹補編》，頁 444。

畫題

再來的畫題類問題與球面幾何有關，主要問題設計方式為「**原形畫異形**」，即在「原題」類型的曲面上，畫上一個不同的幾何圖形，求這個幾何圖形所圍的表面積或曲線長度，常見的問題便是在球面上畫上多邊形，求曲面上多邊形的面積。如圖 4，便是在球面上畫一個三角形，並求其面積。⁵¹書中並把此問題推廣至球面畫任意多邊形的情況。

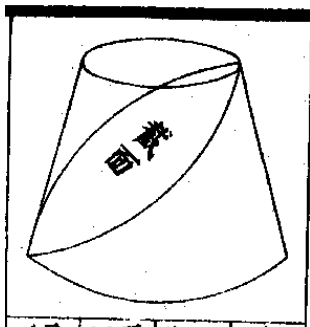


圖 3 截題例

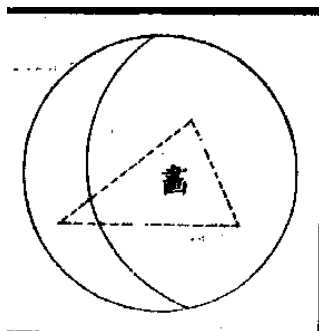


圖 4 畫題例

穿題

前面提到的「穿題」類問題為「**原題穿異形**」所形成。這類問題關心的是當圓柱、球、橢圓柱、橢球等「原題」類型的圖形，被圓、橢圓、多邊形等圖形從中間或某些部位貫穿時，求貫穿部分的體積、表面積、交周等問題。圖 5 所示，便是利用六邊形穿過球，求相交部分體積。⁵²這類問題是十九世紀和算家相當感興趣且熱門的問題。

受題

利用「**照形以其光受別形**」可形成受題問題，即此類問題與投影問題有關，主要是將幾何形體受光照，求投影至平面上所得圖形的面積與周長。圖 6 為《算法圓理鑑》書中出現的受題，⁵³此問題便是求月球受日照所得月影形之面積與周長。這裡不難看出這類問題與天文學之間的關聯。

⁵¹ 本圖片引自齋藤宜義，《算法圓理鑑》，收入《和算選粹補編》，頁 444。

⁵² 本圖片引自齋藤宜義，《算法圓理鑑》，收入《和算選粹補編》，頁 445。

⁵³ 本圖片引自齋藤宜義，《算法圓理鑑》，收入《和算選粹補編》，頁 446。

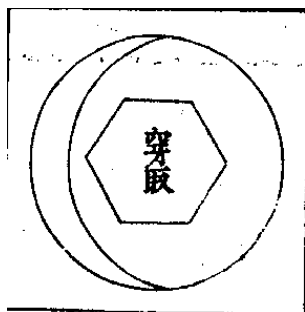


圖 5 穿題例

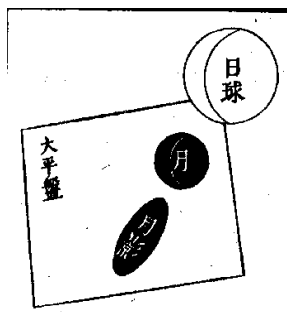


圖 6 受題例

回題

回題類問題是以「周絲內容形及挾筆文回之」，換句話說，問題的內容是將一根長度固定的封閉絲線，固定其上兩點間線段，用筆尖繃緊其餘部分的絲線而畫線，求所畫圖形的面積和周長。如圖 7 所示，⁵⁴本問題便是固定三角形某邊上兩頂點，求筆尖所畫出封閉曲線形的周長術。

釣題

釣題類問題的條件是「以絲釣垂形」，此類問題與幾何形體的重心有關，主要是依某條件限制下垂釣一立體，再求某些幾何量。如 8 所示，⁵⁵此問題便是以垂掛一球冠形，使之平衡後，自中心截之，求其截面積。

轉題

最後的轉題類問題，主要是依「列形其周附形，又其周附形轉距之」設計而成，此類轉距軌跡問題，亦即與今日所謂的擺線問題有關。當圓在直線、圓或多邊形等圖形上滾動時，求該圓周上一點的軌跡長所圍圖形的面積。如圖 9 所示，⁵⁶該問題便是將一圓形繞一正方形轉動，求圓上一定點在轉動過程中所形成軌跡圖形的面積。

以上八類問題便是《算法圓理鑑》對圓理問題所作之分類，雖然書中為數三分之二的問題仍屬於原題類、圓理極數以及穿題類問題，⁵⁷但從本書乃可看出十九世紀和算家設計的數學問題，所具有的多樣性與變化。

⁵⁴ 本圖片引自齋藤宜義，《算法圓理鑑》，收入《和算選粹補編》，頁 448。

⁵⁵ 本圖片引自齋藤宜義，《算法圓理鑑》，收入《和算選粹補編》，頁 448。

⁵⁶ 本圖片引自齋藤宜義，《算法圓理鑑》，收入《和算選粹補編》，頁 449。

⁵⁷ 本書含附錄共 36 問裡，有 24 問屬原題與穿題這兩類。

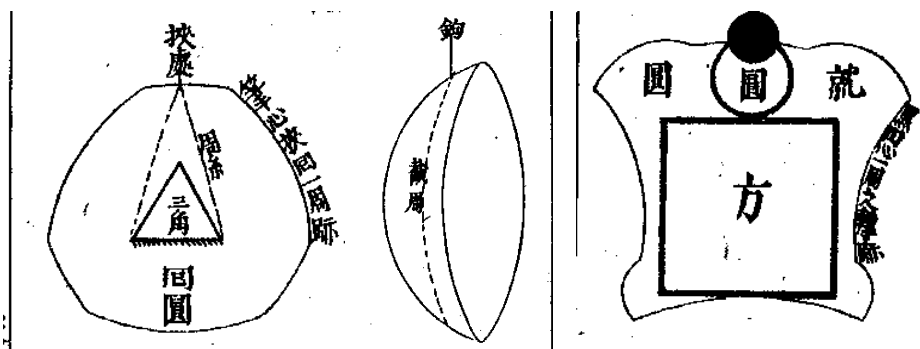


圖 7 回題例

圖 8 鈞題例

圖 9 轉題例

前面提到過，十七與十八世紀和算家所設計的幾何問題，皆是以求某線段長為主，但這樣的現象到了十八世紀末與十九世紀初開始有了改變。十九世紀和算家受益於圓理豁術的發展，他們可處理的幾何問題類型比十八世紀時來得多且廣，大多數的問題不再限於求各類一維的線段長，轉而求各式曲線長、面積、體積、表面積、穿去積等更高維度的幾何量。以《算法圓理鑑》為例，該書中含附錄共包含了 37 個問題，筆者將此書各問題以及所求幾何量，整理於表 5 之中。從表 5 可發現，僅其中的第 8 問、第 10 問、第 12 問、第 17 問、第 33 問、第 36 問與第 37 問等 7 個問題涉及了求線段長，其它問題多是以弧長、面積、體積、表面積等各類幾何量為主。

表 5 《算法圓理鑑》各問題與所問幾何量

問題類型	問題	所問幾何量		所問幾何量
原題	第 1 問	環實積	第 2 問	覓積
	第 3 問	使黑積最多	第 4 問	總積
	第 5 問	離覓積	第 6 問	頂覓積
	第 7 問	環積	第 8 問	圓徑
	第 9 問	求最長弧背	第 10 問	圓缺積至多問矢
	第 11 問	極多黑積	第 12 問	矢及弧背
截題	第 13 問	最短截周	第 14 問	截積

	第 15 問	截面積		
畫題	第 16 問	畫覓象積	第 17 問	垂針
	第 18 問	畫覓積		
穿題	第 19 問	殘覓積	第 20 問	穿取覓積
	第 21 問	交背	第 22 問	穿取覓積
	第 23 問	穿取積	第 24 問	交積
	第 25 問	穿取積	第 26 問	穿取覓積
受題	第 27 問	月球影域及域周		
品題	第 28 問	回圓周		
釣題	第 29 問	截面積		
轉題	第 30 問	圓積	第 31 問	圓積及周
	第 32 問	覓積		
附錄	第 33 問	小橢圓長徑	第 34 問	交周
	第 35 問	字數	第 36 問	斜最長
	第 37 問	水斜幕		

另外，就整個十九世紀和算發展而言，穿去題可謂相當重要的問題類型，小林龍彥與田中薰的研究收集整理了十九世紀之後的各類穿去題，⁵⁸其中與穿去題有關的算額共計 138 面，而奉納於算額上的穿去題，共計 178 題，他們並將這些問題細分成 36 類。可見十九世紀之後，穿去題在和算研究所受的重視程度。

同時，這裡我們也可以看到《算法圓理鑑》與其他和算作者對算學問題的分類大不相同，例如《圓理算經》是依據問題所求的「對象」，將圓理問題分成「直線、周、背、面積、體積、穿去積、極術」等。而比較早期著作如十八世紀初期的《括要算法》、十八世紀中期的《拾機算法》以及十九世紀的《算法新書》等書，對於數學知識分類方法亦大不相同，《括要算法》、《拾機算法》與《算法新書》等書，或多或少包含了諸約、垛積、招差、角術、圓與弧長等

⁵⁸ 參考小林龍彥、田中薰，〈算額にあらわれた穿去問題について〉，《數學史研究》，90（日本(東京)，1981），頁 1-39。經其考證最早的穿去題出現於 1673 年《算法勿憚改》書中所留遺題 100 問的第 91 問。

與中算有所關連的基本問題，然而《算法圓理鑑》的分類則已完全脫離這些框架，展現出的特色是以方、圓、球、立體等平面、空間圖形組合而成的純粹幾何式問題，並利用原、畫、截、穿、受、回、釣、轉等概念來設計問題並作分類，這樣的多樣化也反應出和算家對於圓理問題研究上的豐富成果。

七、結語

本文概略地論述江戶時期約 250 年的跨度裡，日本數學家吸收中算傳書後，如何在本土數學文化影響下，過渡並發展出具有在地化特色的數學問題與數學知識活動。筆者並考察江戶時期涉及數學知識分類的重要算書，整理並探討和算主流問題的發展、流變與相關脈絡。

在此，筆者簡單總結這段歷史過程中的重要事件與重要問題類型。十七世紀初期，和算家的數學著作，受中算書《算法統宗》影響，以實用數學為主，而 1641 年吉田光由所著的遺題版《新編塵劫記》，引領了一系列遺題繼承風氣，是為和算脫離算用朝純數學問題發展的重要轉捩點。在這過程中，和算家吸納了《算學啟蒙》與《楊輝算法》等書的中算知識，並在他們感興趣的「代數式幾何問題」精益求精，相輔相成地促進代數方法與符號之發展。1674 年，關孝和的《發微算法》發展出傍書法符號與筆算代數系統，書中亦使用了許多列方程式與解方程式的方法，標誌著和算家跳脫中算天元術的限制，走向獨立發展之路。而關孝和後續的著作，雖仍不脫中算框架，但在代數符號、解題方法、代數與數論相關問題，以及對圓周率、弧長與正多邊形等幾何的研究上，均取得了超越性的成就。

1722 年的《綴術算經》是一部開創性的著作，透過幕級數展開式處理圓、弧問題後，引領了十八世紀和算圓理研究上的新風潮，當時的和算家們在方、圓、弧相關幕級數展開式公式的研究上，取得了豐碩的成果，並延續至十八世紀後期的穿去題研究上。再者，隨和算的公開與普及化，算額奉納的文化在十八世紀後期慢慢走向高峰，越來越多習算者投入算學研究與算題設計的行列，並將自己設計創作的問題，奉納於各地寺廟、神社，促進了數學交流與數學問題的發展。

到了十九世紀，和算家除了創制各類數學表之外，他們感興趣的數學問題主要集中在幾何問題上。此時期的幾何問題分類亦更多元，從平面轉向立體，從求線段長轉向求各種不規則的曲線長、面積、體積與穿去積。各類問題與幾何圖形益發豐富，無論是圓理八問或圓理八題，皆展現出和算家在幾何問題研究上的創新與成果，為求解題的過程中，也促進新知識與新方法的發展與應用。

此外，和算文本呈現的體例，仍延襲中算書的傳統，多數仍維持「題-答-術」結構的體例，雖然部分和算家體例安排上較為自由，有些改變，但多數著作仍不脫漢字文化圈裡算學著述的傳統編排框架。如此來看，江戶時期的和算，依附在東亞漢字文化圈之下成長，雖然存在與中算、東算共通的特色，共享著相同的文字與體例，但和算家吸納了中算知識後，透過遺題繼承、算額奉納等特有的本土數學文化，以及數學家自主發展的問題意識等因素影響與促成下，發展出有別於中算與東算的在地數學文化，並在數學問題的研究與創新設計上，展現出多元而創新豐富的成果。

從他們研究的問題來看，一方面偏好將舊知識與舊問題作各種推廣，同時，更多的創意體現在他們所設計，各類平面與立體圖形交織而成的幾何問題上。換言之，他們的數學學習、數學研究與問題設計，不再局限於社會與官僚所需的實用技術層次，也非為了考試或當官等功利性目的，而是追求更高層次的純學術研究，他們純興趣地為設計新題目或進行算額奉納等目的，而從事數學知識活動。江戶時期日本在輸入的中算基礎上，由數學學術社群與成員獨立自主且自發地從事數學知識活動，本土化、在地化且智性地發展出和算特有的問題特色與數學文化風貌。

引用書目

一、古籍

千葉胤秀，《算法新書》，1830。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：
http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

小出兼政，《圓理算經》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

山路主住，《算法弧背詳解》（出版地、出版社、年代不詳）。

今村知商，《豎亥錄》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，2009。

有馬賴僮，《拾璣算法》，1767。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：
http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

村松茂清，《算俎》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，2009。

松永良弼，《方圓算經》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

松永良弼，《方圓雜算》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，2009。

松永良弼，《立圓率》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

松永良弼，《圓周率》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，2009。

建部賢弘，《發微算法演段諺解》，1685。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：
http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

建部賢弘，《圓理弧背術》，1722。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：
http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

建部賢弘，《綴術算經》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

建部賢弘、建部賢明、關孝和，《大成算經》，1711。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

蜂屋定章，《圓理發起》，1728。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

齋藤宜義，《算法圓理鑑》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，2009。

藤田貞資，《神壁算法》，1789。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

藤田貞資，《精要算法》，1781。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

藤田嘉信，《增刻神壁算法》，1796。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

藤田嘉信，《續神壁算法》，1807。下載自東北大學附屬圖書館和算資料庫，網址：http://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398wasan

關孝和，《三部抄》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

關孝和，《括要算法》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

關孝和，《發微算法》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

安島直圓，《不朽算法》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，2009。

安島直圓，《弧背術解》，徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

安島直圓，《圓柱穿空圓術》徐澤林譯版，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

二、專書

日本學士院編，《明治前日本數學史》，卷1；東京：岩波書店，1979。

王裕仁，《安島直圓《不朽算法》之內容分析》，臺北：國立臺灣師範大學碩士論

文，2013。

王燕華，《松永良弼《方圓算經》之內容分析》，臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2012。

林典蔚，《關孝和《三部抄》之內容分析》，臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2012。

林美杏，《建部賢弘之研究—以《綴術算經》為例》，臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2013。

徐澤林，《和算中源-和算算法及其中算源流》。上海：交通大學出版社，2013。

徐澤林，《和算選粹》。北京：科學出版社，2008。

徐澤林，《和算選粹補編》。北京：科學出版社，2009。

烏雲其其格，《和算的發生：東方學術的藝道化發展模式》。上海：上海辭書，2009。

洪萬生等著，《當數學遇見文化》。臺北：三民出版社，2009。

張功翰，《《拾璣算法》初探》。臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2014。

陳政宏，《《算法新書》初探》。臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2014。

黃俊瑋，《關流算學研究及其歷史脈絡：1722-1852》。臺北：國立臺灣師範大學博士論文，2014。

廖傑成，《《算祖》之內容分析》。臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2013。

劉雅茵，《關孝和《括要算法》之內容分析》。臺北：國立臺灣師範大學碩士論文，2011。

三、期刊論文

黃俊瑋，〈江戶時期寺廟中的數學交流〉，《中華科技史學會學刊》，19（臺北，2014），頁 52—56。

黃俊瑋，〈江戶時期和算發展之分期〉，《中華科技史學會學刊》，18（臺北，2013），頁 24—33。

蘇意雯，〈天元術 vs. 點竄術〉，《HPM 通訊》，3，（臺北，2000），頁 2—6。

蘇意雯，〈日本寺廟的算額介紹〉，《HPM 通訊》，6，（臺北，2003），頁 14—16。

徐澤林，〈江戶時代的算額與日本中學數學教育〉，《數學傳播》，31(3)，（臺北，2007）。

The mathematic problems and related characteristic In *Wasan* culture

Jyun-Wei Huang

Mathematics Teacher

Huang, Taipei Municipal Heping High School

This article is devoted to explaining how Japan mathematicians developed the mathematic problems with local characters under the influence of their mathematic culture after the Chinese mathematic books communicated to Japan in the Edo period. First, I investigate the important *Wasan* texts involving the taxonomy of mathematic knowledge in the Edo period, and then arrange and discuss the development, transition and the related context of mainstream problems in *Wasan*.

The development of *Wasan* mainly grown up under the Chinese character culture circle in East Asia. There are many common properties existed between *Wasan*, Chinese mathematics and Korean mathematics. After *Wasan* mathematicians acquire mathematic knowledge from Chinese mathematic texts, *Wasan* evolved into local mathematic culture and problem characteristic that different from Chinese mathematics and Korean mathematics under the influence of problematiques of *Wasan* mathematicians, and also under the advancement of the local culture of dedicating *Sangaku* and the characteristic mathematic activity of solving other' problems and then leaving new problems to others.

Wasan mathematicians designed problems by generalizing the traditional problems coming from Chinese mathematics and other old problems, and also designed original geometry problems that consisted of all kinds of plan and spatial figures. In conclusion, depended upon the Chinese mathematics served as the foundation, *Wasan* mathematicians, the mathematics community and its members, engaged in mathematic activities autonomously and voluntarily, and locally evolved the peculiar problem characteristic and the style and features of mathematic culture of *Wasan*.

Keywords: *Wasan*, *History of mathematics*, *East Asia culture*, *mathematics problem*, *the taxonomy of knowledge*

